

القواسم والمضاعفات

Diviseurs et multiples communs

تمرين 1

1- نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E): $3x - 8y = 1$.حل المعادلة (E) إذا علمت أن $(3;1)$ حلها الخاص.2- من بين حلول (E) عيّن تلك التي تحقق: $y^2 - x = 5$.

3- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة الجملة التالية:

$$\begin{cases} 21x - 56y = 7 \\ -5 \leq x < 27 \end{cases}$$

$$(-5;-2); (3;1); (11;4); (19;7) \quad (11;4) \quad (8k+3; 3k+1)$$

تمرين 2

1- عيّن القاسم المشترك الأكبر لـ 2189 ، 1393 و 398.

2- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $2189x + 1393y = 398$.لاحظ أن الثنائية $(-3; \alpha)$ حلها الخاص، حيث α عدد صحيح يطلب تعيينه.

3- من بين حلول المعادلة السابقة عيّن تلك التي تحقق:

$$(أ) \quad x < 11 \text{ و } y < 18 \quad (ب) \quad x^2 + 6y - 39 < 0$$

$$(4;-6); (11;-17) \quad (-10;16); (-3;5); (4;-6) \quad (7k-3; -11k+5)$$

تمرين 3

1- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E): $85x - 51y = 0$.2- من بين حلول المعادلة (E) عيّن الثنائيات $(x; y)$ التي تحقق $|x - y| \leq 4$.3- حل في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة: $85x - 51y = 867$.

4- يريد شخص شراء صحن وأكواب. إذا كان ثمن الصحن الواحد 100DA و ثمن الكوب الواحد 60DA. احسب عدد الصحن وعدد الأكواب التي يمكن شراؤها بمبلغ 1020DA إذا علمت أن عدد الصحن أكبر من عدد الأكواب.

$$(9;2) \quad (3k; 5k) \quad (3k'; 5k' - 17) \quad k' \geq 4 \quad (-6; -10); (-3; -5); (0; 0); (3; 5); (6; 10)$$

تمرين 4

1- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E): $95(x - 2) = 76(y + 1)$.2- من بين حلول المعادلة (E) عيّن الثنائيات $(\alpha; \beta)$ التي تحقق: $\alpha^2 - \beta \equiv 0 [5]$.3- حل في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ما يلي:

$$\begin{cases} 5(2 - x) = -4(y + 1) \\ x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(14;14); (10;9); (6;4) \quad (20k'+2; 25k'-1); (20k'-2; 25k'-6) \quad (4k+2; 5k-1)$$

تمرين 5 بكالوريا

1- أثبت أن العددين 993 ، 170 أوليان فيما بينهما.

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين x و y حيث $993x - 170y = 143$.(أ) عيّن الحل الخاص $(x_0; y_0)$ ، للمعادلة (E) بحيث:

$$x_0 + y_0 = 6$$

(ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).3- أوجد أصغر عدد طبيعي a بحيث يكون باقي قسمة العدد $(a-1)$ على كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب.

$$2001 \quad (170k+1; 993k+5) \quad (1;5)$$

تمرين 6

1- عيّن الأعداد الصحيحة x بحيث: $7x \equiv -19 [9]$.

2- استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة:

$$7x - 9y = -19 \quad \dots [I]$$

3- من بين حلول المعادلة [I] عيّن تلك التي تحقق:

 y يقسم العدد x .4- نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب $2\alpha 5$ في نظام العد ذي الأساس 7، ويكتب $1\beta 3$ في نظام العد ذي الأساس 9. عيّن α و β ثم اكتب n في النظام العشري.

$$n=138, \beta=6, \alpha=5 \quad (-4;-1) \quad (9k+5; 7k+6) \quad 9k+5$$

تمرين 7

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة:

$$7x + 13y = 119 \quad \dots [I]$$

1- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة [I] فإن: y مضاعف للعدد 7. استنتج جميع حلول المعادلة [I].2- عيّن الأعداد الطبيعية α ، β و γ (غير معدومة) حيث:

$$\overline{\alpha\gamma 1}^{(6)} + \overline{1\beta 3\beta}^{(8)} = \overline{32\gamma\alpha}^{(7)}$$

3- الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $\mathcal{P}$ المستوي ذو المعادلة $7x + 13y + 17z - 119 = 0$ ،و $\mathcal{D}$ المستقيم تقاطع $\mathcal{P}$ مع $(O; \vec{i}, \vec{j})$ أي المستوي (xOy) .عيّن النقاط من $\mathcal{D}$ التي إحداثياتها أعدادا طبيعية.

$$(4;7;0); (17;0;0) \quad \gamma=5, \beta=7, \alpha=4 \quad (-13k+17; 7k)$$

تمرين 8

- 1- بين أن العددين 27 و 22 أوليان فيما بينهما.
- باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن عددين صحيحين a و b يحققان $27a + 22b = 1$.
2- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $405x - 330y = 15$.
3- استنتج في المجموعة $\mathbb{Z}$ حلول الجملة:
$$\begin{cases} \lambda \equiv 0 [27] \\ \lambda \equiv 1 [22] \end{cases}$$

$$(594k+243) \mid (22k+9, 27k+11) \mid (9, -11)$$

تمرين 9

- نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلتين التاليتين:
$$2022x' - 2021y' = -1 \quad \dots [I]$$
$$2022x - 2021y = 3 \quad \dots [II]$$

1- أثبت أن عددين طبيعيين متتابعين أوليان فيما بينهما.
2- عيّن حلا خاصا لـ [I]. استنتج حلا خاصا للمعادلة [II].
3- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة [II].
4- (أ) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y حلول المعادلة [II]. ما هي القيم الممكنة للعدد d ?
(ب) عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة [II] بحيث يكون $PGCD(x; y) = 1$.

$$\begin{matrix} 3;1 & (2021k+3; 2022k+3) & (3;3) & (-1;-1) \\ (6063/+4045; 6066/+4047); (6063/+2024; 6066/+2025) & / \geq 0 \end{matrix}$$

تمرين 10

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة: $4x - 7y = 6 \quad \dots [I]$
1- بين أن المعادلة [I] تقبل حلولاً ثم عيّن حلاً خاصاً لها وليكن $(x_0; y_0)$ حيث $0 < x_0 < 6$ ، واستنتج جميع حلولها.
2- (أ) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y حلول المعادلة [I]. ما هي القيم الممكنة للعدد d ?
(ب) عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة [I] بحيث يكون $PGCD(x; y) = 2$.
3- ليكن γ عدداً صحيحاً. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة:
$$84\alpha - 147\beta = 21\gamma \quad \dots [II]$$

$$\begin{matrix} 6;3;2;1 & (7k+5; 4k+2) & k \geq 0 & (5;2) \\ (7k'+2\gamma; 4k'+\gamma) & (42/+40; 24/+22); (42/+26; 24/+14) & / \geq 0 \end{matrix}$$

تمرين 11 بـكالوريا

- 1- حلّ العدد الطبيعي 1995 إلى جداء عوامل أولية.
2- عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية والتي تحقق $x + 7y = 1995$ و $PGCD(x; y) = 19$.

$$(1862;19); (1729;38); (1463;76); (931;152); (532;209); (266;247)$$

تمرين 12

حافلة صغيرة لنقل المسافرين بها 16 راكبا مصنّفون إلى ثلاثة أصناف: مجموعة دفعت 40 دج (صنف a) ومجموعة أخرى دفعت 30 دج (صنف b) أما المجموعة الثالثة فلم تدفع شيئاً (صنف c). إذا علمت أن المبلغ الإجمالي المدفوع هو 570 دج. احسب عدد الركاب من كل صنف.

$$1; 3; 12 \mid 4a+3b=57$$

تمرين 13

x و y عددان طبيعيين؛ d قاسمهما المشترك الأكبر و m مضاعفهما المشترك الأصغر. عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$$\begin{matrix} \begin{cases} m-d=9 \\ x \leq y \end{cases} & -2 & \begin{cases} d=3 \\ m=120 \end{cases} & -1 \\ \begin{cases} x+y=30 \\ m+6d=45 \end{cases} & -4 & \begin{cases} -d+m=y+18 \\ d \geq 9 \end{cases} & -3 \\ \begin{cases} x^3-7x=26y^2 \\ d=1 \end{cases} & -6 & \begin{cases} m^2+21d^2=2020 \\ x \geq y \end{cases} & -5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (9;18); (3;12); (2;5); (1;10) & (24;15); (120;3); (15;24); (3;120) \\ (13;9) & (22;4); (44;2) & (27;3); (3;27) & (18;27); (36;9); (54;18) \end{matrix}$$

تمرين 14 بـكالوريا بتصرف

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
1- بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n عدد طبيعي. استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(u_n; u_{n+1})$.
2- بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{4^n - 1}{3}$.
3- عيّن من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(4^{n+1} - 1; 4^n - 1)$.
4- عيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر لـ $4^{n+1} - 1$ و $4^n + 1$. عيّن قيم n حيث: $PGCD(4^{n+1} - 1; 4^n + 1) = 1$.

$$n=2k \mid d=5 \text{ أو } d=1 \mid PGCD(4^{n+1}-1; 4^n-1)=3$$